

第二届全球华人智能控制与智能自动化大会

中国·西安 一九九七年六月二十三日—二十七日

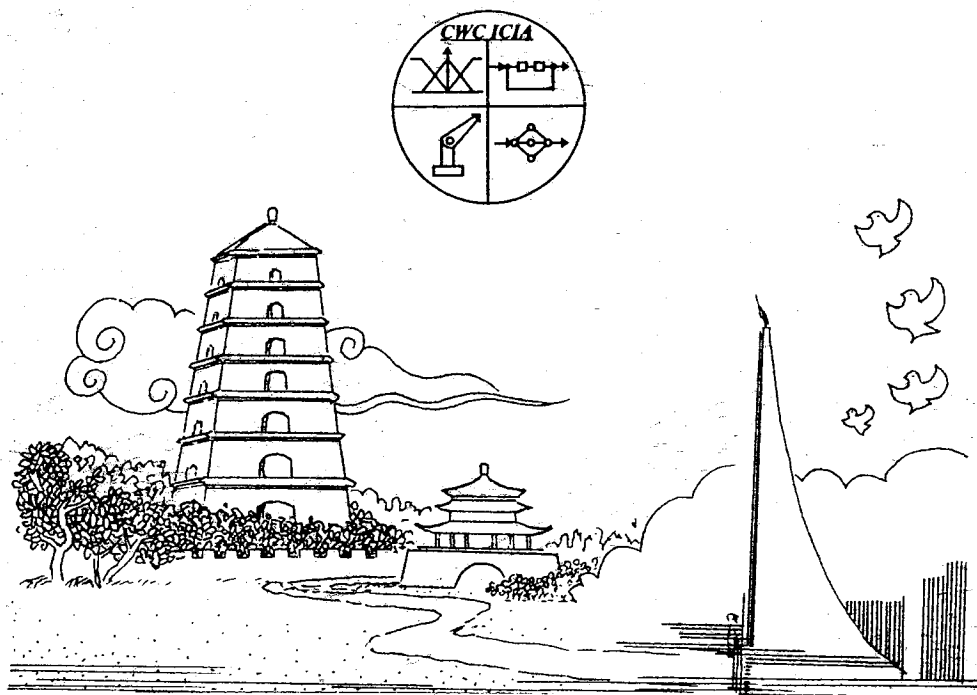
论文集

Proceedings of The Second Chinese World Congress
on Intelligent Control and Intelligent Automation

(CWC ICIA'97)

Xian, China, June 23 - 27, 1997

下卷



西安交通大学出版社

Xi'an Jiaotong University Press

1997

独立模态空间法问题研究

孙德敏 刁子建

中国科技大学自动化系

安徽合肥 230026

摘要: 本文研究了结构振动主动控制中得独立模态空间控制法(IMSC), 提出了一种新的模态坐标抽取方法, 并就观测溢出问题进行了研究, 给出了传感器的最优位置寻优目标函数.

关键词: IMSC, 固有值, 固有函数, 观测溢出

一 前言

在机械工程, 土木工程, 力学工程等领域中, 都存在着结构振动的问题, 这必然会造成一些不利的后果, 因此需要通过主动控制予以克服, 对此问题的研究, 即结构振动主动控制, 近三四十年间得到了很大发展, 在很多方面得到了应用. 其原因在于, 振动主动控制能适应结构不同振动状态的变化, 可获得比传统的被动减振技术远为良好的效果. 在众多的主动控制设计中, 独立模态空间控制法(IMSC-Independent Modal Space Control)是较为先进的一种设计方法. 它把系统振动分解为各自独立的模态振动之和, 在理论上完全控制整个系统的振型成为可能. 本文介绍了此方法的概要, 指出观测溢出的不可避免和其根源所在. 进一步通过减小观测溢出给出传感器的最优位置目标函数. IMSC 应用上的一大难点就是难以精确抽取出各模态坐标. 除了大家所熟悉的观测器法, Meirovitch 提出了模态滤波法(Modal filters), 这两种方法都具有其固有的缺点. 本文提出了用固有函数系作为基函数进行数据拟合的方法, 用此方法可得到基于最小二乘意义下的最优模态坐标观测值, 仿真结果表明, 它的精度高于模态滤波法.

二 IMSC 法简介

假设一分布式参数系统, 其振动方程通过有限元分析等方法已得到, 为

$$\begin{cases} M(P) \frac{\partial^2 U(P,t)}{\partial t^2} + LU(P,t) = f(P,t), P \in D & (1) \\ B_r U(P,t) = 0 & (2) \end{cases}$$

$U(P,t)$ 为任意位置 P 处的位移, $P \in D$

L 为线性自共轭微分算子, 代表刚度.

$M(P)$ 为质量分布

$f(P,t)$ 为控制力

$B_r U(P,t)$ 为边界条件

(此模型中为突出主动减振控制的作用, 被动减振阻尼被忽略了)

由 $L\phi_r(P) = \lambda_r M\phi_r(P)$, 利用边界条件(2), 解出固有函数系 $\{\phi_r(P)\}$, 固有值 $\lambda_r = \omega_r^2 \geq 0, r=1,2,\dots$ 由固有问题的 Sturm-Liouville 理论可知: 固有值 λ_r 非负, $\{\phi_r(P)\}$ 为带权 $M(P)$ 的完备正交函数系:

$$\int_D M(P)\phi_r(P)\phi_s(P)dP = \delta_{rs}, r,s=1,2,\dots \quad (3)$$

$$\int_D L\phi_r(P)\phi_s(P)dP = \lambda_{r(s)}\delta_{rs}, s=1,2,\dots \quad (4)$$

δ_{rs} 为 Kronecker 算子

可以 $\{\phi_r(P)\}$ 展开 $U(P,t)$ 和 $f(P,t)$, 得

$$U(P,t) = \sum_{r=1}^{\infty} U_r(t)\phi_r(P) \quad (5a)$$

$$U_r(t) = \int_D M(P)\phi_r(P)U(P,t)dP \quad (5b)$$

$$f(P,t) = \sum_{r=1}^{\infty} M(P)f_r(t)\phi_r(P) \quad (6a)$$

$$f_r(t) = \int_D \phi_r(P)f(P,t)dP \quad (6b)$$

(1)式可写作:

$$\ddot{U}_r + \lambda_r U_r = f_r, r=1,2,\dots \quad (7)$$

通过正交分解, 系统振动方程被分解为各自独立的模态方程组(7), 这样, 对任意一阶模态 r , 我们可依各种设计方法, 独立的求出其模态控制力 $f_r(t)$, 而不必考虑其他模态对其影响, 这正是独立模态空间控制(IMSC)的要旨所在.

三 受控模态坐标观测问题

要想能够对整个系统的振型进行控制, 实际上还需要两个必不可少的条件, 一个是有分布式的传感器, 能观测出整个 $U(P,t)$, 这样, 通过式(5b)才能得出所有模态的坐标, 另一个条件是分布式的动作器 $f(P,t)$, 这样才能通过式

(6a), 用理想的 f_r^* 构造 $f(P, t)$ 。但在实际应用中, 这两个条件都是难以实现的, 因此想准确观测所有的模态坐标和准确控制所有的模态都是不可能的。实际应用中, 一般只会观测前 M 阶态的坐标, 然后对其中前 N 阶模态进行控制。我们把前 N 阶模态称为受控模态 (controlled mode), $N+1$ 阶至 M 阶模态称为剩余模态 (residual mode), $M+1$ 阶之后的所有模态称为隐模态 (unmodelled mode)。

由于实际应用中的传感器和作为动作器都只能是有限数目, 离散分布的, 固 MSC 法的焦点在于如何从有限个离散分布的传感器中抽出受控模态和剩余模态的坐标, 又如何以有限个离散分布的动作器去实现受控模态的理想控制 f_r^* 。本文中仅讨论前一个问题。

由于连续分布的传感器是不可能实现的, 所以系统的状态变量必须从有限个离散分布的传感器输出获得。文献[3]中介绍了两种以有的模态作标抽取方法, 并比较了其优缺点。下面给出此文的一些结论, 然后提出一种运用数据拟合抽取模态坐标的新方法, 同时还论述了观测器溢出问题。

实现状态观测器, 一个常用的方法是构造观测器, 即利用系统模型和真实系统输出误差来观测真实系统的状态变量。由于真实系统的模态数是无穷的, 其状态变量的维数也是无穷的, 所以不能构造与之等维的观测器, 只能构造模态数为 M 的模型。其直接后果是受控模态坐标的观测值 \hat{U}_r 受到来自剩余模态和隐模态的坐标影响, 与真值产生偏离, 这就是所谓的观测溢出。Meirovitch 指出, 观测溢出一般不会影晌原系统的稳定, 但如果观测器的增益选择不当的话, 会导致观测器的输出不收敛。除了导致观测溢出外, 模态观测器法还存在一些其他的缺陷。首先是传感器的数目和位置难以确定, 其次, 观测器的选取没有确定的算法, 而且同传感器的位置还密切相关, 使其设计很困难。

为了避免上述缺点, Meirovitch 提出了模态滤波器法。他的方法是, 利用有限个传感器测量值, 直接构造一插值函数 $\hat{U}(P, t)$, 以它来逼近 $U(P, t)$, 再利用式(5b)以求 U_r 。此法的优

点是只要传感器数目足够大, 模态坐标观测值就可以达到很高的精度。观测值的精度在所有的时刻都是一致的, 不象观测器法须从任意的值开始逐渐收敛至真实值。而且此方法不仅适用于一维系统, 对二, 三维也同样适用, 只要变化一下插值基函数即可。同时由于积分运算具有平滑能力, 故在一定程度上可以消除噪声和观测溢出的影响。

但是, 模态滤波法的精度直接依赖于传感器的数目和所使用得插值函数。在插值函数不是很合适的情况下, 要想获得较高的精度, 传感器的数目必须很大, 文献[3]中 Meirovitch 采用了 Hermite 三次插值, 此法有一个重大缺陷: 对传感器的功能要求很高, 不但须能测量插值处 $U(P_j, t)$ 点的值, 还须测量插值点处 $U(P_j, t)$ 的微商值, 即 $\frac{\partial U}{\partial P} \Big|_{P=P_j}$ 的值, 这样使其应用到受到很大限制。为克服此缺陷, 可考虑用样条插值代替三次 Hermite 插值, 这样做的优点是可以不需要 $\frac{\partial U}{\partial P} \Big|_{P=P_j}$ 的值, 这样适实际应用有了可能。但是由于样条插值是通过已有的插值点函数值构造具有连续微商的插值函数, 每一插值点处的 $\frac{\partial U}{\partial P} \Big|_{P=P_j}$ 都必须利用传感器的输出在线计算出来, 然后才能构造出 $\hat{U}(P, t)$, 再用滤波器得出 U_r 。其计算量较之 Hermite 插值大为增加, 且必须在线完成, 这就难以进行实时控制。

Meirovitch 认为, 只要传感器的数目足够大, 采用模态滤波器法便可以完全消除观测溢出。这个观点是错误的。下面我们就一维分布系统的情况予以说明。

$$U(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} U_r(t) \phi_r(x) = \sum_{r=1}^{\infty} \tilde{U}_r(x, t) \quad (8)$$

在振动方程中, 固有函数系最常见的是三角函数系 $\{\sin \omega_r x\}$ 或 $\{\cos \omega_r x\}$, 则(8)式实际上就是 $U(x, t)$ 区间 $[0, 1]$ 上的 Fourier 展开式。 $U(x, t)$ 的频谱函数为: $U(\omega) = \sum_{r=1}^{\infty} U_r(t) \delta(\omega - \omega_r)$, δ 为 Dirac 算子。任意模态 r , 其频谱函数为 $U_r(t) \delta(\omega - \omega_r)$, 把大家熟知的采样定理应用到空间函数 $U(x, t)$ 上来。

一个连续函数 $\tilde{U}_r(x,t) = U_r(t)\phi_r(x)$, 其频谱 $\tilde{U}_r(\omega) = U_r(t)\delta(\omega - \omega_r)$, 为有限带宽, 即存在 $\omega_{\max} = \omega_r + \Delta\omega, \Delta\omega > 0$, 当 $\Delta\omega \geq \omega_{\max}$ 时, $\tilde{U}_r(\omega) = 0$, 那么 $\tilde{U}_r(x,t)$ 可以由以 $T \leq \pi/\omega_{\max}$ 为采样间隔的函数值 $\tilde{U}_r(KT,t)$ 唯一确定, 若 $T > \pi/\omega_{\max}$, 则 $\tilde{U}_r(x,t)$ 不能被真实再现出来。

上述的采样周期 T , 在空间中就对应着传感器之间的距离。由于 $\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_r$,

$\lim_{r \rightarrow \infty} \omega_r = +\infty$, 要想准确再现 $\tilde{U}_r(x,t)$, 传感器之间的距离虽模态阶数的增高而减小, 也即所需的传感器数目随之增大, 直至无穷。所以, 只要传感器是有限的, 不管其数目如何, 至多只能再现一定模态的 $\tilde{U}_r(x,t)$, 阶高于此模态者不能被真实再现出来, 必然对其他阶模态的抽取产生影响, 观测溢出也就随之产生了。因此, 只要传感是有限的, 观测溢出是不可避免的。而且随着阶数的增高, 对模态的再现就越不准确, 对其坐标的观测精度就越差。只不过 $r \rightarrow \infty$ 时, 幅值 $U_r(t)$ 也趋于 0, 其影响逐渐弱化, 在一定的精度下观察不出来而已。

从上述内容中, 我们还能得到一个有用的结果: 只要能得到 $\{\phi_r(P)\}$, 根据受控模态和剩余模态数 M , 应用采样定理, 以 $T < \pi/\omega_{\max}$ 为传感器间隔, 就能估算出所需的传感器数目。

模态滤波法虽然有其固有的困难, 但它采用有限点输出构造函数去逼近 $U(x,t)$ 的思想是很有启发的。既然我们已知组成 $U(P,t)$ 的固有函数族 $\{\phi_r(P)\}$ 的具体形式, 为什么不直接以它作为基函数去逼近 $U(P,t)$ 呢? 这实际上就是采用数据拟合来求取 \hat{U}_r 。

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_K(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(P_1) & \phi_2(P_1) & \dots & \phi_\infty(P_1) \\ \phi_1(P_2) & \phi_2(P_2) & \dots & \phi_\infty(P_2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \phi_1(P_K) & \phi_2(P_K) & \dots & \phi_\infty(P_K) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \\ \vdots \\ U_\infty(t) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \phi_1(P_1) & \phi_2(P_1) & \dots & \phi_M(P_1) \\ \phi_1(P_2) & \phi_2(P_2) & \dots & \phi_M(P_2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \phi_1(P_K) & \phi_2(P_K) & \dots & \phi_M(P_K) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \\ \vdots \\ U_M(t) \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \phi_{M+1}(P_1) & \phi_{M+2}(P_1) & \dots & \phi_\infty(P_1) \\ \phi_{M+1}(P_2) & \phi_{M+2}(P_2) & \dots & \phi_\infty(P_2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \phi_{M+1}(P_K) & \phi_{M+2}(P_K) & \dots & \phi_\infty(P_K) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{M+1}(t) \\ U_{M+2}(t) \\ \vdots \\ U_\infty(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_K \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\text{即 } y = HU + \delta \quad (10)$$

$$\text{令 } J = \delta^T \delta, \text{Min} J \quad (11)$$

$$\frac{\partial J}{\partial U} = \frac{\partial}{\partial U} (y - HU)^T (y - HU) = -2H^T (y - HU) = 0 \quad (12)$$

$$\therefore \hat{U} = (H^T H)^{-1} H^T y \quad (13)$$

只要适当选择 H 使 $|H^T H| \neq 0$, 便可求出基于最小二乘意义下的模态估计值 \hat{U} 。

此算法不须测 $\frac{\partial U}{\partial P} \Big|_{P=P_j}$, 降低了传感器的要求, 且 $(H^T H)^{-1} H^T$ 只与传感器位置有关, 可事先离线计算, 便于实时控制, 数据拟合相对于插值法, 还有优势在于: 插值函数在插值点上满足 $\hat{U}(P,t) = U(P,t)$, 即要求插值曲线通过所有的测量值, 但测量值中本身存在着观测溢出, 还总包含观测误差影响, 这是我们所不希望的。而数据拟合法将此误差的影响极小化了。而且采用固有函数系 $\{\phi_r(P)\}$ 本身就比用多项式插值更接近实际的 $U(P,t)$ 。因此有理由认为, 在传感器数目相同的情况下, 用数据拟合比滤波法更为精确。但观测溢出总是存在的。

从此方法出发, 可给出传感器位置的寻优指标。

$$y = HU + \delta = HU + H_U U_U \quad (14)$$

$$\hat{U} = (H^T H)^{-1} H^T y \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon &= U - \hat{U} = U - (H^T H)^{-1} H^T y \\ &= U - (H^T H)^{-1} H^T (HU + \delta) \\ &= -(H^T H)^{-1} H^T \delta \\ &= -(H^T H)^{-1} H^T H_U U_U \end{aligned} \quad (16)$$

$$\text{令 } J_U = \varepsilon^T \bar{W} \varepsilon = U_U^T H_U^T H (H^T H)^{-1} \bar{W} (H^T H)^{-1} H^T H_U U_U \quad (17)$$

(17), \bar{W} 为加权阵, J_U 即为观测溢出导数的被

观测模态与实际的差异, 令 $\bar{U}_r = E(U_r)$, 使 $J_U \rightarrow \min$, 对 P_1, P_2, \dots, P_K 寻优, 便可得出最优传感器位置, 实际应用时, U_r 取有限维。

四 算例

下面, 我们比较一下模态滤波法和数据拟合合法的观测效果。我们对形如 $F(x) = \sum_{i=1}^{15} U_r \phi_r(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{i=1}^{15} \frac{1}{(2i)^2} \sin \frac{i\pi x}{10}$ 的函数进行观测。

文献[3]给出了模态滤波法的观测结果:

K/r	1	2	3	4	5
准确值	0.25000	0.06250	0.02778	0.01563	0.01000
2	0.40790	0.09852	0.01517	0.01232	0.00328
3	0.26718	0.08492	0.04269	0.01742	0.00639
4	0.25336	0.06762	0.03452	0.01881	0.01141
5	0.25007	0.06334	0.02903	0.01689	0.01093
6	0.25026	0.06288	0.02815	0.01586	0.01081
7	0.25015	0.05274	0.02805	0.01422	0.00865
8	0.25010	0.06134	0.02667	0.01456	0.00898
9	0.24906	0.06160	0.02691	0.01479	0.00920
10	0.25000	0.06248	0.02709	0.01496	0.00935
11	0.25000	0.06248	0.02709	0.01496	0.00935

表 1

我们采用数据拟合法, 传感器均匀分布在[]上, 观测结果为:

K/r	1	2	3	4	5
5	0.24941	0.06128	0.02580	0.01172	0.00490
6	0.24963	0.06076	0.02571	0.01313	0.00691
7	0.24889	0.06122	0.02630	0.01389	0.00793
8	0.25000	0.06250	0.02667	0.01435	0.00852
9	0.25000	0.06250	0.02778	0.01562	0.01000
10	0.25000	0.06250	0.02778	0.01562	0.01000
11	0.25000	0.06250	0.02778	0.01563	0.01000

表 2

可见精度高于模态滤波法。当我们采用上文中给出的目标函数, 解出最优传感器位置时, 此结果还可进一步改善为:

K/r	1	2	3	4	5
1	0.24952	0.06286	0.02943	0.01465	0.00640
2	0.24963	0.06250	0.02778	0.01563	0.01000
3	0.25000	0.06250	0.02778	0.01563	0.01000

表 3

可见, 数据拟合得方法优于模态滤波法, 经抑制观测溢出后, 只用了个传感器就达到了模态滤波法个传感器所达不到的效果。

五 结束语

本文研究了一种有效的结构振动主动控制方法 - 独立模态空间控制法。简述了其理论概要和实际应用中的模态坐标观测问题, 及观测溢出问题。提出了新的模态观测法 - 最小二乘意义下的数据拟合法, 并由此出发给出了对观测器溢出的抑制方法。算例表明, 此法是精确有效的。

六 参考文献

- [1] Leipholz, H.H.e. "Modal Approach to the Control of Distributed-Parameter Systems"
- [2] Meirovitch, L. and Rajaram, S. "On the Uniqueness of the Independent Modal-Space Control Method"
- [3] Meirovitch, L. and Baruh, H. "On the Problem of Observation Spillover in Distributed-Parameter Systems"
- [4] Oz, H. and Meirovitch, L. "Stochastic Independent Modal-Space Control of Distributed-Parameter Systems"
- [5] Raja, P.K. and Sun, S.P. "Modal Control of a Flexible Beam with Multiple Sensors and Actuators"
- [6] Noton, M. Modern Control Engineering
- [7] 严镇军, 数学物理方程
- [8] 王宏策, 邵惠鹤, 现代控制导论
- [9] 徐翠薇, 算方法引论